



**מבחן סיכום באלגוריתמים ב' - מועד א' 30.6.02**

- מספר המחברת שלך הוא \_\_\_\_\_ .
- בבחינה 7 דפים כולל דף הפתיחה, יש לוודא **עכשיו** כי כל הדפים בידך.
- בבחינה 4 שאלות, יש לפתור את כל השאלות.
- יש לקרוא כל שאלה היטב, הבנת השאלות היא חלק מן המבחן.
- כל חומר עזר מותר, מותר להשתמש במחשבוניס.
- משך הבחינה שלוש שעות.
- התשובות תכתבנה על גבי טופס המבחן, במקרה הצורך אפשר להשתמש גם במחברת.

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	סך הכל

**בהצלחה!!**

**שאלה מספר 1 (25 נקודות)**

נתונה רשת זרימה  $G(V, E, s, t, c)$ . תהי  $f: E \rightarrow R^+$  פונקציה זרימה חוקית ברשת  $G$  ותהי  $U$  תת קבוצה של  $V$ . תהי  $U^{in}$  ( $U^{out}$  בהתאמה), קבוצת הקשתות מצמתים ב  $V - U$  אל צמתים ב  $U$ . (קבוצת הקשתות מצמתים ב  $U$  אל צמתים ב  $V - U$ ). **הזרימה החוצה מ  $U$** ,  $E^o(U)$  מוגדרת על ידי

$$E^o(U) = \sum_{e \in U^{out}} f(e) - \sum_{e \in U^{in}} f(e)$$

הוכח כי לכל תת קבוצה  $U \subset V$  המקיימת  $s, t \notin U$  ולכל פונקציה זרימה חוקית  $f$  מתקיים  $E^o(U) = 0$ .

## שאלה מס' 2 (25 נקודות)

בהינתן גרף מכוון וממושקל  $D(V, E, w)$ . צומת  $u$  הוא מקור של צומת  $v$  אם קיים מסלול מכוון מ  $u$  אל  $v$ . נסמן את קבוצת המקורות של  $v$  ב  $Sources(v)$ . בהינתן צומת  $v$ , המקור הרחוק ביותר של  $v$  הוא מקור של  $s_{\max}$ , אשר מרחקו של  $s_{\max}$  מ  $v$  הוא הגדול ביותר מבין כל המקורות של הצומת  $v$ , כלומר

$$d(s_{\max}, v) = \max_{w \in Sources(v)} \{d(w, v)\}$$

כאשר  $d(x, z)$  מסמן את המרחק מצומת  $x$  אל צומת  $z$ .

### שימו לב:

1. אם יש צומת  $z \in V$  כך שאין מסלול מכוון מ  $z$  אל  $v$ , אז  $z$  הוא מקור רחוק ביותר של  $v$ .
2. לכל צומת  $v$ , יתכנו כמה (אחד או יותר) מקורות רחוקים ביותר.

בשאלה זו עליכם להתמודד עם הבעיה החישובית הבאה:

**קלט:** גרף מכוון  $D(V, E, w)$  וצומת  $t \in V$ .

**פלט:** מקור רחוק ביותר של הצומת  $t$ ,  $s_{\max}$ , והמרחק של הצומת  $s_{\max}$  מן הצומת  $t$ .

בהקשר זה, עליכם לענות על השאלות הבאות:

2.1 תארו במלים את האלגוריתם.

2.2 הציגו את האלגוריתם בקוד דמה.

2.3 נמקו את נכונות האלגוריתם.

2.4 מהי סיבוכיות האלגוריתם, נמקו תשובתכם.

2.5 זה עתה נודע כי הגרף  $D(V, E, w)$  הוא סימטרי כלומר, לכל  $1 \leq i < j \leq n$ , אם  $(v_i, v_j) \in E$  אז גם  $(v_j, v_i) \in E$  ומתקיים  $w(v_i, v_j) = w(v_j, v_i)$ . האם האלגוריתם שהצעתם נכון לבעיה החדשה? נמקו בקצרה.

2.6 האם תוכלו להציע אלגוריתם בסיבוכיות נמוכה יותר, עבור גרף סימטרי? נמקו.

**שאלה מס' 3 (25 נקודות)**

יהי  $G(V, E, w)$  גרף לא מכוון עם משקולות אי שליליים על הקשתות ויהי  $T_m(V, E_m)$  עץ פורש מינימום של  $G$ .  
 נניח כי הפעילו את אלגוריתם Dijkstra החל מצומת  $s \in V$  ויהי  $T_l(V, E_l)$  עץ המרחקים שהאלגוריתם יוצר.  
**תזכורת:** עץ המרחקים הוא עץ פורש של  $G$  המקיים: לכל  $v \in V$ ,  $d_G(s, v) = d_{T_l}(s, v)$ , כלומר: לכל  $v \in V$ ,  
 המרחק ב  $G$  בין  $s$  ל  $v$  שווה למרחק ב  $T_l$  בין  $s$  ל  $v$ .

עבור כל אחת מן הטענות הבאות יש לקבוע האם היא נכונה תמיד, שגויה תמיד או נכונה לפעמים:

1. יהיו  $u, v \in V$  שני צמתים שרירותיים ב  $G$ , ונניח כי  $u \neq s, v \neq s$ , אזי  $d_{T_m}(u, v) < d_{T_l}(u, v)$ .
2. לכל  $v \in V, v \neq s$ ,  $d_{T_m}(s, v) < d_{T_l}(s, v)$ .
3.  $w(T_m) \leq w(T_l)$ .
4.  $E_m \cap E_l = \emptyset$ .
5.  $|E_m \cap E_l| > 1$ .
6. לכל  $v \in V, E_m \cap E_l$  מכיל קשת הנוגעת ב  $v$ .
7.  $E_m \cap E_l$  מכיל קשת הנוגעת ב  $s$ .

7	6	5	4	3	2	1	התשובה
							סמנו אם תמיד נכון
							סמנו אם תמיד שגוי
							סמנו אם לפעמים נכון

#### שאלה מס' 4 (25 נקודות)

שאלה זו, מתייחסת לאלגוריתם לזיהוי צמתי הפרדה ורכיבים אי-פריקים (דו-קשירים). יהי  $G(V, E)$  גרף לא מכוון. נניח כי בגרף  $G$ , בוצע חיפוש לעומק, זיהוי צמתי הפרדה וזיהוי רכיבים אי-פריקים החל מצומת  $r$ . לכל צומת  $v$ , נסמן את זמן הגילוי של  $v$  ב  $d[v]$  ואת הערך הנמוך של  $v$  ב  $low[v]$ . נסמן ב  $Sep(V)$  את קבוצת צמתי ההפרדה ב  $V$ . לכל צומת  $v \in V - Sep(V)$ , נסמן ב  $comp[v]$  את הרכיב האי-פריק של  $v$ .

יהיו  $u, v, w$  צמתים כלשהם ב  $V - Sep(V)$ . בכל אחד מארבעת הסעיפים הבאים מופיעים כמה תנאים. בכל סעיף עליכם לקבוע האם יש דוגמא שבה כל התנאים מתקיימים. אם התשובה חיובית, יש לצייר גרף ובו עץ DFS המקיים את הדוגמא. בציור עליכם לציין את: שורש העץ, מספרי DFS של כל צומת והערך הנמוך של כל צומת.

$$4.1 \quad comp[u] = comp[v] \text{ וגם } low[u] \neq low[v]$$

המקרה יתכן / לא יתכן (מחקו את המיותר) אם התשובה חיובית צירו גרף המדגים את המקרה.

$$4.2 \quad low[u] = low[v] \text{ וגם } comp[u] \neq comp[v]$$

המקרה יתכן / לא יתכן (מחקו את המיותר) אם התשובה חיובית צירו גרף המדגים את המקרה.

$$4.3 \quad d[u] < d[v] < d[w] \text{ וגם } comp[u] = comp[w] \neq comp[v]$$

המקרה **יתכן** / **לא יתכן** (מחקו את המיותר) אם התשובה חיובית צירו גרף המדגים את המקרה.

$$4.4 \quad d[u] < d[v] \text{ וגם } comp[u] = comp[v] \text{ וגם } low[u] > low[v]$$

המקרה **יתכן** / **לא יתכן** (מחקו את המיותר) אם התשובה חיובית צירו גרף המדגים את המקרה.